

# آموزش DEA

(تحليل پوشش داده‌ها)

## به همراه مثال

[www.softgostar.com](http://www.softgostar.com)

## صورت مساله:

شرکتی 5 رستوران را اداره می کند. داده های رستوران عبارتند از ساعات عملیات هفتگی، تعداد کارکنان تمام وقت و هزینه های هفتگی ملزومات. ستاده ها عبارتند از متوسط سود هفتگی، سهم بازار و نرخ رشد سالانه.

### داده ها

رستوران	ساعات عملیات	تعداد کارکنان تمام وقت	هزینه ملزومات (هزار ریال)
A	96	16	850
B	110	22	1400
C	100	18	1200
D	125	25	1500
E	120	24	1600

### ستاده ها

رستوران	سود هفتگی (هزار ریال)	سهم بازار (%)	نرخ رشد (%)
A	3800	25	8
B	4600	32	8.5
C	4400	35	8
D	6500	30	10
E	6000	28	9

این مثال با فرض بازده ثابت نسبت به مقیاس به صورت ورودی محور حل شده است:

تحلیل جواب های نرم افزار:

### کارایی

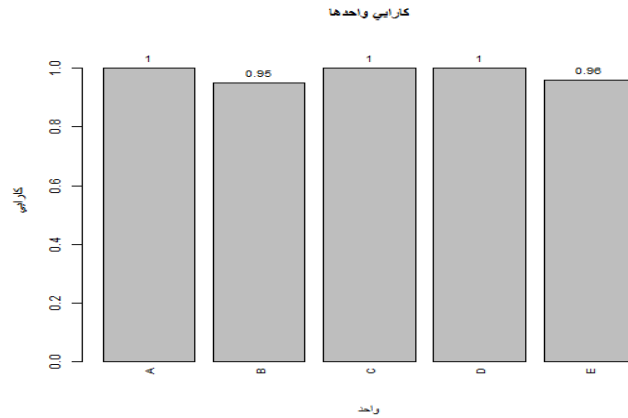
کارایی به صورت زیر است:

واحد (رستوران)	میزان کارایی	نوع کارایی
A	1	کارایی پاراتو
B	0.954	ناکارا
C	1	کارایی پاراتو
D	1	کارایی پاراتو
E	0.964	ناکارا

همان گونه از جدول 1 مشخص است رستوران های A، C و D کارا هستند. رستوران های B و E هم ناکارا هستند و به ترتیب کارایی آن ها برابر 0.954 و 0.964 است.

- ✓ توجه شود که اگر کارایی واحدی کمتر از 1 باشد ناکاراست.
- ✓ اگر کارایی واحدی برابر 1 بوده و کمبودی در خروجی و مازادی در ورودی نداشته باشد کارایی پاراتو است.
- ✓ اگر کارایی واحدی برابر 1 بوده و کمبودی در خروجی یا مازادی در ورودی داشته باشد کارایی ضعیف است.

شکل زیر هم کارایی واحدها را نشان می دهد:



گروه های مرجع واحدها (رستورانها) را در جدول زیر می توانید مشاهده کنید:

peer3	peer2	peer1	
-	-	1	A
4	3	1	B
-	-	3	C
-	-	4	D
-	4	3	E

Peer: مرجع

با توجه به جدول فوق مرجع هر رستوران به صورت زیر است:

- مرجع رستوران A، واحد 1 ( خود رستوران A) است.
- مرجع رستوران B، واحدهای 1، 3 و 4 ( رستوران های C، A و D) است.
- مرجع رستوران C، واحد 3 (رستوران C) است.
- مرجع رستوران D، واحد 4 (رستوران D) است.
- مرجع رستوران E، واحدهای 3 و 4 ( رستوران های C و D) است.

با توجه به اینکه رستوران های A، C و D کارای پاراتو هستند مرجع خود نیز می باشند.

تفسیر جدول فوق بدین صورت است که مثلا مدیر رستوران E برای رسیدن به کارایی می تواند از رستوران های C و D الگو بگیرد.

### تعداد مرجع شدن

تعداد مرجع شدن واحدها در جدول زیر قابل مشاهده است:

نام واحد	تعداد مرجع شدن
1	2
3	3
4	3

جدول فوق به ما می گوید که:

- واحد 1 ( رستوران A) دو بار مرجع واحدها شده است.
- واحد 3 ( رستوران C) 3 بار مرجع واحدها شده است.
- واحد 4 ( رستوران D) 3 بار مرجع واحدها شده است.
- ✓ واحدهای 2 و 5 (رستوران های B و E) به دلیل ناکارایی مرجه نشده اند.
- ✓ این محاسبات را می توان از با شمردن واحدهای مرجع جدول مرحله قبل هم به دست آورد.

جدول زیر مقادیر λ (لاندا، یا همان وزن مرجع) را نشان می دهد:

مقادیر لاندا

E	D	C	B	A	
0	0	0	0	1	A
0	0.129	0.56	0	0.341	B
0	0	1	0	0	C
0	1	0	0	0	D
0	0.909	0.021	0	0	E

تفسیر جدول فوق بدین صورت است که مثلاً رستوران B برای رسیدن به مرز کارایی باید از ترکیب گروه مرجع خود (رستوران A، C و D) استفاده کند. بدین صورت:

$$\begin{aligned} &= \text{ساعات عملیات رستوران B در شرایط کارا} \\ &= 0.341 \times (\text{ساعات عملیات رستوران A}) + 0.56 \times (\text{ساعات عملیات رستوران C}) + 0.129 \times (\text{ساعات عملیات رستوران D}) \\ &104.861 = (96) \times 0.341 + (100) \times 0.56 + (125) \times 0.129 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \text{تعداد کارکنان تمام وقت رستوران B در شرایط کارا} \\ &= 0.341 \times (\text{تعداد کارکنان تمام وقت رستوران A}) + 0.56 \times (\text{تعداد کارکنان تمام وقت رستوران C}) + 0.129 \times (\text{تعداد کارکنان تمام وقت رستوران D}) \\ &18.76 = (16) \times 0.341 + (18) \times 0.56 + (25) \times 0.129 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \text{هزینه ملزومات رستوران B در شرایط کارا} \\ &= 0.341 \times (\text{هزینه ملزومات رستوران A}) + 0.56 \times (\text{هزینه ملزومات رستوران C}) + 0.129 \times (\text{هزینه ملزومات رستوران D}) \\ &1155.35 = (850) \times 0.341 + (1200) \times 0.56 + (1500) \times 0.129 \end{aligned}$$

این محاسبات را می توان برای تمام ورودی ها و خروجی ها انجام داد.

وزن ها (متغیرهای مدل اولیه)

جدول زیر مقدار متغیرهای مدل اولیه (مضربی) که همان V (ضرایب ورودی) و U (ضرایب خروجی) هستند را نشان می دهد:

وزن ورودی ها (مقادیر V)

V3	V2	V1	
0	0.062	0	A
0	0	0.009	B
0.001	0.002	0	C
0	0.04	0	D
0	0	0.008	E

وزن خروجی ها (مقادیر U)

U3	U2	U1	
0.034	0.002	0	A
0.09	0.002	0	B
0	0.029	0	C
0	0	0	D
0	0.009	0	E

اگر مدل اولیه CRS ورودی محور به صورت زیر باشد:

فرمول 1-

$$MAX Z = \sum_{r=1}^s u_r y_{r0}$$

St:

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0$$

$$u_r, v_i \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

مقادیر U و V در جدول بالا آمده است.

### مازاد ورودی و کمبود خروجی

میزان مازاد ورودی (sx) واحدها را می توانید در جدول زیر مشاهده کنید:

sx3	sx2	sx1	
0	0	0	A
179.189	2.21	0	B
0	0	0	C
0	0	0	D
154.276	0.042	0	E

Sx1: میزان مازاد ورودی 1، Sx2: میزان مازاد ورودی 2، Sx3: میزان مازاد ورودی 3.

میزان کمبود خروجی (sy) واحدها را می توانید در جدول زیر مشاهده کنید:

sy3	sy2	sy1	
0	0	0	A
0	0	0	B
0	0	0	C
0	0	0	D
0.257	0	0	E

Sy1: میزان مازاد خروجی 1، Sy2: میزان مازاد خروجی 2، Sy3: میزان مازاد خروجی 3.

- ✓ از مقادیر کمبود و مازاد می توان در تشخیص واحدهای کارای ضعیف یا پارا تو بودن و همچنین در محاسبه مقادیر بهینه ورودی ها و خروجی ها استفاده کرد.
- ✓ اگر واحدی دارای کارایی 1 باشد و دارای کمبود مازاد ورودی یا کمبود خروجی باشد، آن واحد " کارای ضعیف " است.

مقادیر ورودی و خروجی و مقادیر مطلوب آن ها در جداول زیر آمده است:

جدول زیر مقادیر واقعی ورودی ها را نشان می دهد:

مقادیر واقعی واحدها (ورودی ها)

رستوران	ساعات عملیات	تعداد کارکنان تمام وقت	هزینه ملزومات (هزار ریال)
A	96	16	850
B	110	22	1400
C	100	18	1200
D	125	25	1500
E	120	24	1600

جدول زیر مقادیر مطلوب ورودی ها را نشان می دهد:

مقادیر مطلوب واحدها (ورودی ها)

رستوران	ساعات عملیات	تعداد کارکنان تمام وقت	هزینه ملزومات (هزار ریال)
A	96	16	850
B	104.887	18.767	1155.736
C	100	18	1200
D	125	25	1500
E	115.707	23.099	1388.482

جدول زیر مقادیر واقعی خروجی ها را نشان می دهد:

مقادیر واقعی واحدها (خروجی ها)

رستوران	سود هفتگی (هزار ریال)	سهم بازار (%)	نرخ رشد (%)
A	3800	25	8
B	4600	32	8.5
C	4400	35	8
D	6500	30	10
E	6000	28	9

جدول زیر مقادیر مطلوب خروجی ها را نشان می دهد:

مقادیر مطلوب واحدها (خروجی ها)

رستوران	سود هفتگی (هزار ریال)	سهم بازار (%)	نرخ رشد (%)
A	3800	25	8
B	4600	32	8.5
C	4400	35	8
D	6500	30	10
E	6000	28	9.257

✓ اگر ورودی ها و خروجی ها به مقدار مطلوب برسند تبدیل به واحد کارای پاراتو می شوند.

✓ با توجه به رویکرد ورودی محور :

به طور مثال رستوران E اگر ساعات عملیات خود را از 120 به 115.7 ، تعداد کارکنان را از 24 به 23 و هزینه ملزومات را از 1600 به 1388.4 برساند با همان سطح خروجی تبدیل به واحد کارا می شود.

اگر از دید خروجی به قضیه نگاه کنیم، رستوران E با همان سطح ورودی و برای رسیدن به کارایی فعلی (0.964) می تواند نرخ رشد خود را از 9 به 9.2 برساند (البته سایر خروجی ها تفاوتی ندارد)

✓ توجه شود اختلاف مقدار جزئی که بین مقادیر مطلوب (ورودی) این قسمت و مقادیر مطلوب محاسبه شده در قسمت لاند است به دلیل روند گردن اعداد است.

### متغیرهای کمکی

در جدول زیر مقادیر متغیرهای کمکی و مصنوعی مدل اولیه را می توان مشاهده کرد:

محدودیت 6	محدودیت 5	محدودیت 4	محدودیت 3	محدودیت 2	محدودیت 1	
0.065	0	0	0.202	0	0	A
0.062	0	0	0.046	0	0	B
0.533	0.397	0	0.254	0	0	C
0.037	0	0.043	0.172	0.055	0	D
0.036	0	0	0.086	0.126	0	E

مقدار محدودیت 1 در این جدول همان مقدار متغیر مصنوعی است.

به طور مثال مدل اولیه برای رستوران A با توجه به فرمول 1 بدین صورت است:

$$\text{Max } Z = 3800u_1 + 25u_2 + 8u_3$$

St:

$$96v_1 + 16v_2 + 850v_3 = 1$$

$$3800u_1 + 25u_2 + 8u_3 - 96v_1 - 16v_2 - 850v_3 \leq 0$$

$$4600u_1 + 32u_2 + 8.5u_3 - 110v_1 - 22v_2 - 14000v_3 \leq 0$$

$$4400u_1 + 35u_2 + 8u_3 - 100v_1 - 18v_2 - 12000v_3 \leq 0$$

$$6500u_1 + 30u_2 + 10u_3 - 125v_1 - 25v_2 - 15000v_3 \leq 0$$

$$6000u_1 + 28u_2 + 9u_3 - 120v_1 - 24v_2 - 16000v_3 \leq 0$$

$$u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \geq 0$$

محدودیت 1

محدودیت 2

محدودیت 3

محدودیت 4

محدودیت 5

محدودیت 6

مقادیر کمکی و مصنوعی هر یک از محدودیت ها برای هر واحد در جداول فوق آمده است.